

Colle du 05/02 - Sujet 1
Ensembles et applications, continuité et dérivabilité

Question de cours.

1. Énoncer la caractérisation séquentielle de la limite.
2. Démontrer les deux assertions suivantes :
 - (a) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
 - (b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Exercice 1. Soit $f : [0; 1] \mapsto \mathbb{R}$, on suppose que f s'annule $n + 1$ fois sur $[0; 1]$ et que f est n fois dérivable sur $[0; 1]$. Montrer qu'il existe $c \in]0; 1[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 2. Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$. Montrer que f est injective si et seulement si

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E), \quad f(A) \subseteq f(B) \Rightarrow A \subseteq B.$$

Colle du 05/02 - Sujet 2
Ensembles et applications, continuité et dérivabilité

Question de cours.

1. Définir l'ensemble image et l'ensemble réciproque.
2. Montrer que si f est dérivable sur un intervalle I , alors f est lipschitzienne sur I si et seulement si f' est bornée sur I .

Exercice 1. La fonction $x \mapsto \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{\tan(x)}$ est-elle prolongeable par continuité ?

Exercice 2. Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$. Montrer que

$$f \text{ est surjective} \quad \Leftrightarrow \quad \forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, \quad A \cup B = E \Rightarrow f(A) \cup f(B) = F.$$

Colle du 05/02 - Sujet 3
Ensembles et applications, continuité et dérivabilité

Question de cours.

1. Énoncer l'identité des accroissements finis.
2. Démontrer les deux assertions suivantes :
 - (a) $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.
 - (b) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.

Exercice 1. Soient E, F, G et H quatre ensembles. Soient $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$ et $h : G \rightarrow H$. Démontrer que

$$(f, g \text{ et } h \text{ sont bijectives}) \quad \Leftrightarrow \quad (g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives})$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{x}$. Déterminer si f est prolongeable par continuité puis si le prolongement est $\mathcal{C}^1$.